

Лист 1

Математика

26 апреля 2016 г.

Аннотация

Это более формальное (но не совсем бурбакистское) введение в теорию множеств¹. (В рамках введения в математику). Это не заменяет Бурбаков, а лишь чуть-чуть дополняет и объясняет (немного по-своему)², используя Добавление Общей Топологии Дж. Келли. Просто не хочется выписывать всё, поэтому просто читайте Бурбаков сами. А тут так.

! По умолчанию мы пользуемся **NBG**, а не **ZF**. Это сохраняет всё из **ZF**, но имеет больший формализм и меньшую наивность.

1 О множествах и классификаторе

В этом разделе речь идёт о классификационной схеме аксиом.

1.1 Вставка из логики

(Если Вы знаете что такое интерпретация, то можете пропустить этот подраздел.)

Обычно для начального языка логики есть два языка: тот **о котором** мы говорим и тот, **на котором** мы говорим о нём. (Бурбаки называют это *Метаматематикой*). Вообще для определения теории нужны начальные положения, называемые **аксиомами**. (Например: «Солнце горячее», «Человек обжигается от горячего» и т.д.). Также просто помимо высказываний имеет смысл снабдить аксиомы какими-то операциями (см. сноску). А потом рассматривать счётные³ связки высказываний. Такие высказывания, выводимые⁴ за конечное число шагов называются **теоремами** (Было бы приятно назвать эти выводы *доказательствами*).

1.2 Теория

В нашей теории есть:

¹Суть развития математики — рассматривать (и усложнять) осмысленные и полезные идеи.

²Например, Бурбаки придерживаются функциональной записи, в отличие от записей тут.

³в смысле Бурбаков

⁴Можете поискать: Правила вывода

- Переменные (буквы латинского алфавита) (Их можно считать термами, если Вы в теме).

А вот дальше... Либо Вы разобьёте всё на предикаты и функции или просто на «логические константы». (Но в любом случае должна быть систематизация и понимание символов).

Итого: Наша интерпретация — $\underbrace{\{A; a; B; b; \dots; z, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \in, =, (\subset), \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, \{\dots : \dots\}\}}_{\text{переменные}}$.

$\{\dots : \dots\}$ называется классификатором. Читается он как: класс всех ... таких что ... (это правая подстановка). Правило использования классификатора: левая подстановка — для переменной, правая подстановка для формулы. Например: $\{x: x \in y\}$. Аксиомой мы назовём любое утверждение вот какого вида: $u \in \{x: \boxed{\text{form}}\} \Leftrightarrow u$ — множество и $\boxed{\text{form}}$. Здесь $\boxed{\text{form}}$ — формула, содержащая конкретную переменную (x или u).

Принципы построения формул:

(Если Вы уже разбираетесь в мат логике⁵ — не читайте)

- «Логические константы» (с нужными "арностями") есть формулы ($\exists$ нас это $a \in b$ и $a = b$).
- Если в формуле заменить переменные, то получится формула ($a \in c$).
- Булева комбинаций формул есть формула. $x \in y \vee x \in z$
- Подстановка формулы в формулу есть формула. $(a \wedge b) \in y \vee (a \wedge b) \in z$.

Список выше неполон — точное изложение в Кэлли.

Классификационная схема аксиом: Пусть у нас есть формула: $\{a: A\} \in \{b: B\}$. Теперь заменим переменные a и b другими переменными, $A \rightarrow T$ (формула заменяется на формулу), а B на формулу, в которой вместо переменной, заменяющей a стоит переменная, заменяющая b .

Пример: $\{a: a \in T\} \in \{b: b \in U\} \sim \{s: (s \in R) \vee (s \in W)\} \in \{c: (c \in R) \vee (c \in W)\}$

1.3 Переход к конкретике.

Пример: Пусть наш классификатор имеет вид: $V = \{v: v \in x \vee v \in y\}$. Тогда $t \in V \Leftrightarrow t$ — множество и для любого элемента из t истинна формула: $t \in x \vee t \in y$.

Опр: Класс — это семейство, которое не может быть элементом других семейств. (Это как раз к множеству всех множеств)

Теперь можно строить алгебру классов. (**И она спокойно перекроет нашу алгебру множеств**)

x — множество, если оно принадлежит какому-то классу. Т.е. множество это класс, сам являющийся элементом класса.

⁵Т.е. если Вы знаете что такое кванторы, предикаты, функции.

2 Пример теоремы и доказательства.

Чтобы Вам было интереснее (и мне попроще) — я приведу пример одного доказательства и выложу кучу утверждений. Они и составляют суть первого листка. *(Задачи принимаются любыми преподавателями, если они не против. В любом случае по-видимому в пятницу я (или кто-то другой) разберет задачи.)*

2.1 Пример

Определение: $x \cup y = \{z: z \in x \vee z \in y\}$. Теорема: $z \in x \cup y \Leftrightarrow z \in x \vee z \in y$.

*Нельзя сказать, что это определение, нет. Наше определение для операции над **классами**, а теорема говорит о множестве.*

Доказательство. В силу классификационной аксиомы $z \in x \cup y \Leftrightarrow z \in x \vee z \in y$ и z — множество. Но $z \in x$ или $z \in y$ и z — множество $\Leftrightarrow z \in x \vee z \in y$. $\square$