

Listok 1

2 мая 2016 г.

1. $z \in x \cap y \Leftrightarrow z \in x \wedge z \in y$.

Доказательство. В силу классификатора $z \in x \cap y \Leftrightarrow z \in x \wedge z \in y$ и z — множество. Но $z \in x$ и $z \in y$ и z — множество (в силу определения) $\Leftrightarrow z \in x \wedge z \in y$. $\square$

Видимо более простое объяснение должно прояснить дело: 1-ый шаг — вспоминаем и пользуемся классификатором. (Понимаем, что z — множество и принадлежит каждому из классов). А потом вспоминаем, что множество принадлежит классу, т.е. остаётся только формула.

2. $x \cup x = x$.

Доказательство. $z \in x \cup x \Leftrightarrow z \in x \vee z \in x$ и z — множество. А это $\Leftrightarrow z \in x$ или $z \in x$. Таким z является x (Безусловно если $z = x$, то $z \in x$). $\square$

3. $x \cap x = x$.

Доказательство. $z \in x \cap x \Leftrightarrow z \in x \wedge z \in x$ и z — множество. А это $\Leftrightarrow z \in x$ и $z \in x$. Таким z является x (Безусловно если $z = x$, то $z \in x$). $\square$

4. $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$. То же для пересечения. Сделайте вывод о коммутативности. (Или докажите)

Доказательство. $t \in (x \cup y) \cup z \Leftrightarrow t \in (x \cup y) \vee t \in z$ и t — множество. А это $\Leftrightarrow t \in (x \cup y)$ или $t \in z$. Раскроем первую скобку и получим $\Leftrightarrow t \in x \vee t \in y \vee t \in z$ и t — множество. А это $\Leftrightarrow t \in x \vee t \in y \vee t \in z$. Для правой части — t в левой части $\Leftrightarrow t \in z \vee t \in (y \cup z)$ и t — множество. А это $\Leftrightarrow t \in z \vee t \in y \vee t \in z$.

$t \in (x \cap y) \cap z \Leftrightarrow t \in (x \cap y) \wedge t \in z$ и t — множество. А это $\Leftrightarrow t \in (x \cap y)$ и $t \in z$. Раскроем первую скобку и получим $\Leftrightarrow t \in x \wedge t \in y \wedge t \in z$ и t — множество. А это $\Leftrightarrow t \in x \wedge t \in y \wedge t \in z$. Для правой части — t в левой части $\Leftrightarrow t \in z \wedge t \in (y \cap z)$ и t — множество. А это $\Leftrightarrow t \in z \wedge t \in y \wedge t \in z$. $\square$

Вывод о коммутативности: $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$. Тогда $(y \cup y) \cup z = y \cup (y \cup z)$.

5. Класс $\setminus x$ — Дополнение класса x . $\setminus(\setminus x) = x$.

Доказательство. $z \in \setminus(\setminus x) \Leftrightarrow z \notin (\{y: y \notin x\})$ и z — множество. В силу классификатора условие на множество опускается, т.к. $\setminus(\setminus x)$ и есть класс. Заметим, что $z \notin y \Leftrightarrow \neg(\neg(z \in x)) \Leftrightarrow z \in x$. $\square$

6. $x \setminus y = x \cap (\setminus y)$ — разность классов x и y . $x \cap (y \setminus z) = (x \cap y) \setminus z$.

Доказательство. $t \in x \wedge t \in y \wedge t \notin z$ и z — множество. А это $\Leftrightarrow t \in x \wedge t \in y \wedge t \notin z$.

(Заметим, что в силу ассоциативности мы также можем написать равенство и с $(x \setminus z) \cap y$). $\square$

7. $0 = \{x: x \neq x\}$. $x \notin 0$, $0 \cup x = x$. Пересечение. $x \notin 0 \Leftrightarrow \neg(x \in 0)$. Т.е. x — множество и неверно, что $x \neq x$, т.е. x — множество и верно, что $x = x$. А это верно для любого множества в силу "признака равенства".

8. $\mathfrak{U} = \{x: x = x\}$ — универсум.